ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP. HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐÁP ÁN MÔN GIẢI TÍCH 1 – HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017-2018
Mã môn học: MATH130601
Ngày thi: 31/5/2018

CÂU		**NỘI DUNG**	**ĐIỂM**
I	**1**	Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x - e^x + 1}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan x} - \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\tan x}$ $= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ (VCB tương đương) $= 2 - 1 = 1.$	0.25 0.5 0.25
	2	Ta có $$f(x) = e^{x^2-1} = \frac{1}{e}e^{x^2}$$ Đặt $X = x^2$, trước tiên ta cần tìm khai triển Maclaurin của hàm e^X đến cấp n. Ta có khai triển Maclaurin của hàm e^x là $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n).$$ Do đó $$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + O(X^n).$$ Vậy khai triển Maclaurin của hàm $f(x) = e^{x^2-1}$ đến cấp n với phần dư Peano là $$e^{x^2-1} = \frac{1}{e}\left[1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + O(x^{2n})\right]$$ $$= \frac{1}{e} + \frac{x^2}{e} + \frac{x^4}{2!\,e} + \frac{x^6}{3!\,e} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!\,e} + O(x^{2n}).$$ Số hạng chứa x^{2018} có dạng $$a_n x^{2018} = \frac{x^{2n}}{n!\,e}$$ Suy ra $$2n = 2018 \Rightarrow n = 1009.$$ Vậy hệ số của x^{2018} là $\frac{1}{1009!e}$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
II	**1**	Vì f là hàm sơ cấp, xác định trên các khoảng $(-\infty, 3)$ và $(3, +\infty)$ nên f liên tục trên $(-\infty, 3)$ và $(3, +\infty)$, do đó f liên tục với mọi $x \in \boldsymbol{R}$ khi f liên tục tại $x = 3$. Ta có $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(mx - \frac{1}{2}\right) = 3m - \frac{1}{2}, \quad f(3) = 3m - \frac{1}{2}$$ $$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{\ln(x-3+1)}{(x-3)(x-1)}\right) = \frac{1}{2}$$ Vậy f liên tục với mọi $x \in \boldsymbol{R}$ khi $$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 3m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$	0.25 0.25 0.25 0.25

	2	Ta có $f(x)=(x^2-1)^2$. Khi đó $f'(x)=4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ Tính giá trị hàm số tại các điểm tới hạn $0,1,-1 \in [-1,3]$ và hai đầu mút $x=-1, x=3$, ta được $f(0)=1$ $f(1)=0$ $f(-1)=0$ $f(3)=64$ Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 64 tại $x=3$ và đạt giá trị nhỏ nhất là 0 tại $x=1$ và $x=-1$.	0.5 0.25 0.25
III	**1**	Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=x^2-4$ và đường thẳng $y=3x$ là $x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$ Diện tích miền giới hạn dưới bởi parabol và giới hạn trên bởi đường thẳng là $S=\int_{-1}^{4}(3x-x^2+4)\,dx$ $=\frac{-x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+4x\Big\vert_{-1}^{4}=\frac{125}{6}$ $(đvdt)$.	0.5 0.25 0.25
	2	Đặt $I=\int_{1}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4(x+1)^5}}dx$ Khi $x \to +\infty$ $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x^5}}=\frac{1}{2x^2}$ Chọn $g(x)=\frac{1}{2x^2}$, ta có $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4(x+1)^5}}.2x^2=1.$ Mặt khác, $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ (do $p=2>1$). Vậy theo tiêu chuẩn so sánh 2, tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.	0.25 0.25 0.25 0.25
IV	**1**	Đặt $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!\,3^n}$ Ta nhận thấy chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ là chuỗi số dương với mọi $n \geq 1$ và $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!\,3^{n+1}}.\frac{n!\,3^n}{1}$ $=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3(n+1)}=0<1.$ Vậy theo tiêu chuẩn D’Alembert, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.	0.25 0.5 0.25

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2</td>
<td>Đặt
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n5^n}(x-2)^n,$$
trong đó
$$a_n = \frac{1}{n5^n} \text{ và } X = x-2.$$
Ta xét
$$\lim_{n\to+\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert = \lim_{n\to+\infty}\left\lvert\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}.n5^n\right\rvert = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5}.$$
Khi đó bán kính hội tụ $R=5$, và chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n$ hội tụ với mọi $X \in (-5,5)$.
Tại $X=-5$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$
là chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz $\left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0\right)$.
Tại $X=5$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$
là chuỗi phân kỳ do $p=1$.
Khi đó, miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n$ là $[-5,5)$.
Vậy miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n5^n}(x-2)^n$ là $[-3,7)$.</td>
<td>0.25
0.25
0.25
0.25
0.25
0.25</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>3</td>
<td>Ta có chu kỳ $T=2L=4$, suy ra $L=2$.
Khai triển Fourier của hàm f với chu kỳ $T=2L$ trên đoạn $[-L,L]$ có dạng
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right).$$
Ta có
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 3x\,dx + \int_{0}^{2} 0dx\right] = \frac{3}{4}x^2\Big\rvert_{-2}^{0} = -3.$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{3}{2}\int_{-2}^{0} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{3}{2}\left[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]\Big\rvert_{-2}^{0}$$
$$= \frac{6-6(-1)^n}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & , \text{nếu } n = 2k, k \in \boldsymbol{Z}, \\ \frac{12}{n^2\pi^2} & , \text{nếu } n = 2k+1, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{3}{2}\int_{-2}^{0} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{-2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]\Big\rvert_{-2}^{0} = \frac{6(-1)^n}{n\pi}.$$
Tại những điểm $x \neq 2k$, ta có khai triển Fourier của hàm f như sau
$$f(x) = \frac{-3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{6-6(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{6(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$
Tại những điểm $x = 2k$, ta có: $f(x) = -3$.</td>
<td>0.25
0.25
0.25
0.25</td>
</tr>
</table>